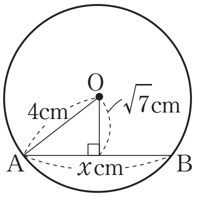
第３３講・三平方の定理④ 円と三平方の定理

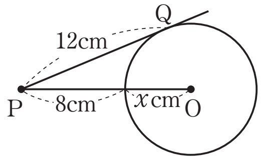
例題 1

次の図で，x の値を求めなさい。ただし，点Ｏは円の中心を表している。

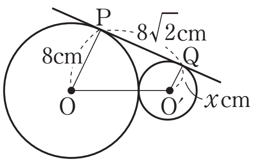
(1)



(2)　PQ は円Ｏの接線

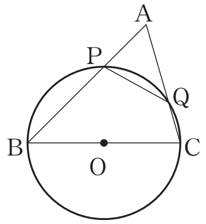


(3)　PQ は２円の接線



例題 2

右の図のように，△ABC の辺 BC を直径とする円Ｏと辺 AB，AC との交点をそれぞれ P，Q とする。∠PAQ ＝ 60°，BP ＝ $2\sqrt{6}$，PQ ＝ 3 とするとき，次の問いに答えなさい。



(1)　AP：AC を求めよ。

(2)　BC の長さを求めよ。

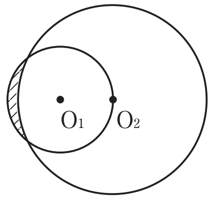
(3)　PA の長さを求めよ。

(4)　CQ の長さを求めよ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 3

右の図のように，半径3の円O_1が半径$3\sqrt{3}$の円O_2の中心を通っている。斜線の部分を図形Sとするとき，次の問いに答えなさい。



(1)　Sの周りの長さを求めよ。

(2)　Sの面積を求めよ。

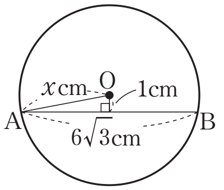
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

問題

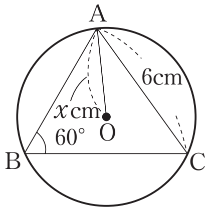
33－1

次の図で，x の値を求めなさい。

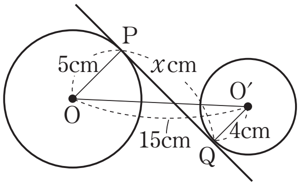
(1)



(2)



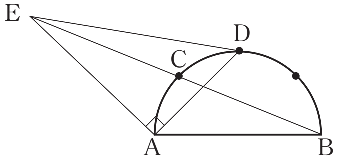
(3)　PQ は 2 円の共通接線



33－2

次の問いに答えなさい。

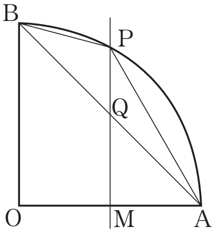
(1)　右の図のように，線分 AB を直径とする半径 2cm の半円がある。$\overset{\frown}{AB}$を 4 等分する点のうち，点 A に近い方から順に C, D とするとき，次の問いに答えよ。



①　∠ABC の大きさを求めよ。

②　BC の延長上に，∠DAE ＝ 90° となるように点 E をとる。線分 DE の長さを求めよ。

(2)　右の図は，半径 4cm，中心角 90° のおうぎ形である。線分 OA の中点を M とし，線分 OA の垂直二等分線と$\overset{\frown}{AB}$との交点を P とする。点 A と点 B，点 A と点 P，点 B と点 P をそれぞれ結ぶ。線分 AB と線分 PM の交点を Q とする。次の問いに答えよ。



①　∠BAP の大きさは何度か。

②　線分 PQ の長さは何 cm か。

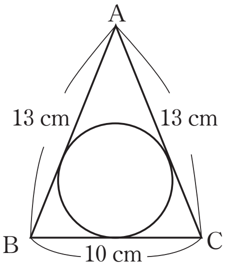
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ *Note* ＞

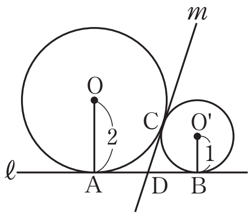
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第33講・確認テスト

[1]　次の問いに答えなさい。

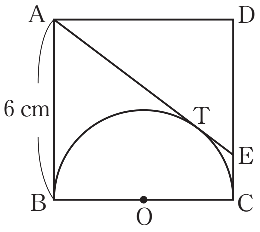


(1)　右の図のように，AB＝AC＝13cm，BC＝10cm の△ ABC に円が内接している。この円の半径は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ cm である。



(2)　右の図のように，半径 2 の円 O と半径 1 の円 O′が点 C で接している。直線 ℓ は 2 つの円 O，O′にそれぞれ点 A，B で接する共通外接線であり，直線 *m* は点 C で 2 つの円 O，O′に接する共通内接線である。また，点 D は直線 ℓ と *m* の交点である。このとき，CD の長さを求めなさい。

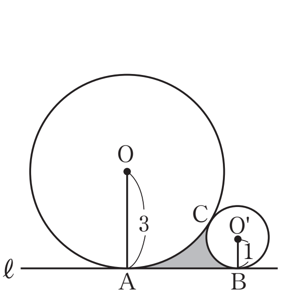
CD ＝$\sqrt{\boxed{エ}}$



(3)　右の図のように，1 辺が 6cm の正方形 ABCD と，その辺 BC を直径とする半円 O がある。線分 AE は半円 O の接線であり，点 T は接点である。このとき，DE の長さを求めなさい。

DE ＝$\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ cm

[2]　右の図のように，半径 3 の円 O と半径 1 の円 O′が点 C で接している。また，円 O，O′はそれぞれ点 A，B で直線 ℓ と接している。このとき，次の問いに答えなさい。

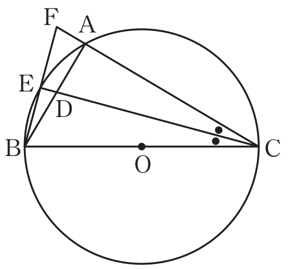


(1)　AB の長さは $\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ である。

(2)　斜線部分の面積は $\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}-\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}\pi$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[3]　右の図のように，△ABC が円 O に内接しており，BC は円 O の直径である。∠ACB の二等分線が AB と交わる点を D，円周と交わる点を E とする。また，CA の延長と BE の延長が交わる点を F とする。AC＝7，BC＝8 のとき，次の問いに答えなさい。



(1)　AD の長さを求めなさい。

$$AD = \frac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソタ}}}{\boxed{チツ}}$$

(2)　CE の長さを求めなさい。

$$CE = \boxed{テ}\sqrt{\boxed{トナ}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第33講・三平方の定理④ 円と三平方の定理

例題 1

(1)　$x=6$　　(2)　$x=5$　　(3)　$x=4$

解説

(1)　点からABに下ろした垂線の足を点Hとすると，

△OAHで，三平方の定理により，$AH^2=4^2-(\sqrt{7})^2=9$　$AH>0$ より，$AH=3$

$x=2AH=2\times3=6$

（△OAH≡△OBHなので AH=BH）

(2)　$\angle OQP=90°$，$OQ=x$(cm)より，△POQで三平方の定理により，

$(8+x)^2=x^2+12^2$　　$x=5$

(3)　O′からOPに垂線O′Hをひくと，△HOO′で三平方の定理により，

$(8+x)^2=(8-x)^2+(8\sqrt{2})^2$，$x=4$

（$OO'=8+x$）

例題 2

(1)　1：2　　(2)　6　　(3)　2　　(4)　$3-\sqrt{6}$

解説

(1)　$\angle BPC=90°$ より，△APCは $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形。

(2)　$\angle BQC=90°$ より，$\angle BQA=90°$，$\angle ABQ=30°$

よって，$\angle POQ=60°$ となり，△OPQは正三角形。

$BC=2PQ=6$

例題 3

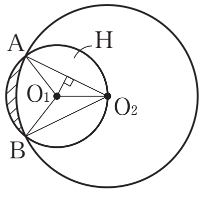
(1)　$(2+\sqrt{3})\pi$　　(2)　$\dfrac{9\sqrt{3}-3\pi}{2}$

解説

(1)　右の図で，$O_1O_2=3$，$O_2H=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ より，

$\triangle O_1O_2H$ は $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形になるので，$\angle AO_1B=120°$，

$\angle AO_2B=60°$



(3)　$\pi\times3^2\times\dfrac{120}{360}-\left\{\pi\times(3\sqrt{3})^2\times\dfrac{60}{360}-\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\dfrac{3}{2}\times2\right\}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

33－1

(1)　$x=2\sqrt{7}$　　(2)　$x=2\sqrt{3}$　　(3)　$x=12$

解説

(2)　O から AC に垂線 OH をひくと，$\angle AOC=120°$ より，$\angle AOH=60°$

よって，$x=AO=\dfrac{2}{\sqrt{3}}AH=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times 3=2\sqrt{3}$

(3)　O から O′Q の延長に垂線 OR をひくと，$OO'=15$，$O'R=4+5=9$ より，

$x=OR=12$

33－2

(1)①　22.5°　②　$2\sqrt{6}$ cm　　(2)①　15°　②　$(2\sqrt{3}-2)$ cm

解説

(1)②　$\angle DAB=45°$ より，△ABEの内角の和で$\angle AEB=22.5°=\angle ABE$

よって，$AE=AB=4$

△ABDは$1:1:\sqrt{2}$の直角三角形より，$AD=2\sqrt{2}$　$DE^2=4^2+(2\sqrt{2})^2=24$

(2)①　△POMは$OM=2$，$OP=4$より，$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形

よって，$\angle POM=60°$，$\angle BOP=30°$，$\angle BAP=\dfrac{1}{2}\angle BOP$

②　$PM=\sqrt{3}OM=2\sqrt{3}$

また，△QMA は $1:1:\sqrt{2}$の直角三角形より，$QM=MA=2$

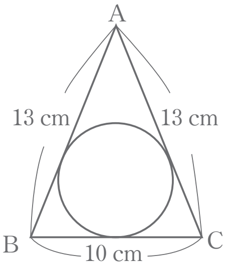
よって，$PQ=(2\sqrt{3}-2)$ cm

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第33講・確認テスト

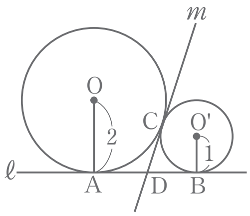
[1]　次の問いに答えなさい。

(1)　右の図のように，AB＝AC＝13cm，BC＝10cm の△ABC に円が内接している。この円の半径は $\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ cm である。



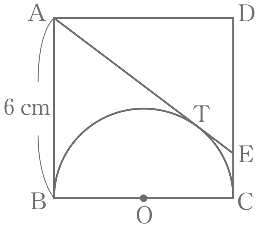
(2)　右の図のように，半径２の円Ｏと半径１の円Ｏ´が点Ｃで接している。直線 ℓ は２つの円Ｏ，Ｏ´にそれぞれ点Ａ，Ｂで接する共通外接線であり，直線 m は点Ｃで２つの円Ｏ，Ｏ´に接する共通内接線である。また，点Ｄは直線 ℓ と m の交点である。このとき，CD の長さを求めなさい。

CD ＝$\sqrt{\boxed{エ}}$



(3)　右の図のように，１辺が 6cm の正方形 ABCD と，その辺 BC を直径とする半円Ｏがある。線分 AE は半円Ｏの接線であり，点Ｔは接点である。このとき，DE の長さを求めなさい。

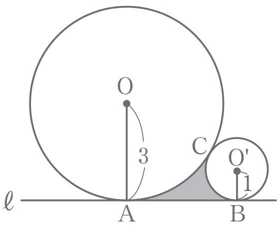
DE ＝$\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ cm



[2]　右の図のように，半径３の円Ｏと半径１の円Ｏ´が点Ｃで接している。また，円Ｏ，Ｏ´はそれぞれ点Ａ，Ｂで直線 ℓ と接している。このとき，次の問いに答えなさい。

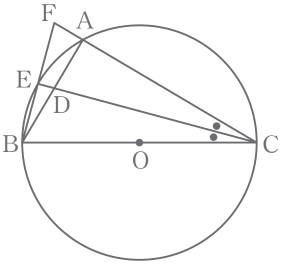
(1)　AB の長さは $\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ である。

(2)　斜線部分の面積は $\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}-\frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}\pi$ である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[3]　右の図のように，△ ABC が円 O に内接しており，BC は円 O の直径である。∠ACB の二等分線が AB と交わる点を D，円周と交わる点を E とする。また，CA の延長と BE の延長が交わる点を F とする。AC=7，BC=8 のとき，次の問いに答えなさい。



(1)　AD の長さを求めなさい。

$AD = \dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソタ}}}{\boxed{チツ}}$

(2)　CE の長さを求めなさい。

$CE = \boxed{テ}\sqrt{\boxed{トナ}}$

解答

[1]　ア　1　　イ　0　　ウ　3　　エ　2　　オ　9　　カ　2

[2]　キ　2　　ク　3　　ケ　4　　コ　3　　サ　1　　シ　1　　ス　6

[3]　セ　7　　ソ　1　　タ　5　　チ　1　　ツ　5　　テ　2　　ト　1　　ナ　5

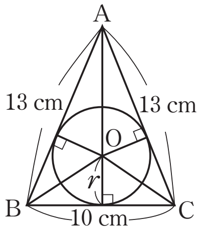
解説

[1]

(1)　内接円の半径を r とする。

右の図より，△OAB＋△OBC＋△OCA＝△ABC

よって，$\frac{1}{2}r(13+10+13)=\frac{1}{2}\times10\times12$，$r=\frac{10}{3}$



(2)　O′から OA に垂線 O′H をひく。

$AB=\sqrt{(2+1)^2-(2-1)^2}=2\sqrt{2}$　　AD＝CD＝BD より，$CD=\sqrt{2}$

(3)　DE＝$x$cm とすると，EC＝ET＝$6-x$(cm)，

AE＝$6+(6-x)=12-x$(cm)

△ADE において，三平方の定理より，

$(12-x)^2=6^2+x^2$，$24x=108$，$x=\frac{9}{2}$(cm)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[2]

(1)　O′からOAに垂線O′Hをひく。△OO′Hにおいて，三平方の定理より，

$AB=O'H=\sqrt{(3+1)^2-(3-1)^2}=2\sqrt{3}$

(2)　△OO′Hは$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形になるから，$\angle AOO'=60°$，$\angle BO'O=120°$

求める面積は，台形OABO′－(おうぎ形OAC＋おうぎ形O′BC)だから，

$\frac{1}{2}\times(3+1)\times2\sqrt{3}-\left(9\pi\times\frac{1}{6}+\pi\times\frac{1}{3}\right)=4\sqrt{3}-\frac{11}{6}\pi$

[3]

(1)　$AB=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$

CDは∠ACBの二等分線だから，AD：BD＝AC：BC

よって，$AD=\frac{7}{7+8}\times\sqrt{15}=\frac{7\sqrt{15}}{15}$

(2)　EC共通，∠ECF＝∠ECB，∠CEF＝∠CEB＝90°より，

△ECF≡△ECB　よって，CF＝CB＝8だから，AF＝1

△ABFにおいて，三平方の定理より，$BF=\sqrt{1^2+(\sqrt{15})^2}=4$

∠BCE＝∠FBA，∠CEB＝∠BAF＝90°より，△ECB∽△ABF

よって，EC：AB＝CB：BF，$EC:\sqrt{15}=8:4$，$EC=2\sqrt{15}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。